

# 1. Wprowadzenie

We współczesnej technice łączności inżynieria ruchu telekomunikacyjnego stanowi podstawę działań związanych z projektowaniem i optymalizacją sieci oraz zapewnieniem odpowiedniej jakości usług oferowanych przez operatorów. Inżynieria ruchu wykorzystywana jest między innymi do optymalizacji rozptywu ruchu i przydziału zasobów w sieciach szerokopasmowych.

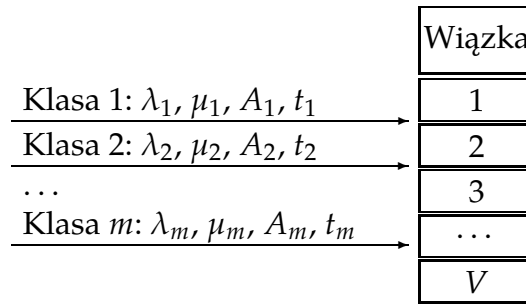
Działanie systemów telekomunikacyjnych opisuje się za pomocą odpowiednich modeli analitycznych, weryfikowanych na podstawie pomiarów charakterystyk ruchowych w systemach rzeczywistych lub eksperymentów symulacyjnych. Symulacja pozwala na wszechstronne badanie charakterystyk dowolnych systemów telekomunikacyjnych. Wadą tego rozwiązania może być zbyt długi czas realizacji eksperymentu symulacyjnego, zależny od stopnia złożoności systemu i przyjętego poziomu wiarygodności. Modele analityczne charakteryzują się mniejszą złożonością obliczeniową i są najczęściej metodami przybliżonymi. Pozwalają jednak na szybkie i efektywne określenie odpowiednich charakterystyk ruchowych analizowanych systemów z uwzględnieniem odpowiednich parametrów QoS. Do modelowania analitycznych systemów sieciowych wykorzystuje się tak zwane algorytmy splotowe. Ich zaletą jest możliwość określenia rozkładów zajętości w systemach pełnodostępnych, którym oferowane są różne strumienie ruchu, np. strumienie od ograniczonej i nieograniczonej liczby źródeł ruchu. Do tej pory algorytmy te były stosowane wyłącznie do oceny charakterystyk ruchowych systemów z procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu.

*Celem pracy jest wykazanie możliwości modelowania systemów zależnych od stanu na podstawie operacji splotu, w szczególności opracowanie nowych algorytmów splotowych dla wybranych systemów zależnych od stanu, tj. wiązki pełnodostępnej z rezerwacją zasobów i wiązki z ograniczoną dostępnością.*

## 2. Systemy zależne i niezależne od stanu

Współczesne sieci szerokopasmowe są systemami wielousługowymi, które przenoszą ruch zintegrowany. Na rysunku 1 przedstawiono model wiązki pełnodostępnej, który jest przykładem takiego systemu. Wiazce oferowanych jest  $m$  strumieni (klas) zgłoszeń Poissona. Każda klasa zgłoszeń opisana jest parametrami: intensywność zgłoszeń  $\lambda_i$ , intensywność obsługi  $\mu_i$ , natężenie ruchu oferowanego  $A_i = \lambda_i / \mu_i$  oraz liczba żądanych PJP (Podstawowych Jednostek Pasma)  $t_i$  do obsługi pojedynczego zgłoszenia. PJP jest definiowana jako największy wspólny podzielnik żądanych przepływności wszystkich zgłoszeń. Pojemność wiązki wyrażona w PJP wynosi  $V$ . Przedstawiony na rysunku model wiązki jest systemem niezależnym od stanu, ponieważ zarówno proces napływania jak i przyjmowania zgłoszeń jest niezależny od liczby zajętych PJP w systemie.

W systemach z procesem napływania zgłoszeń zależnym od stanu, intensywność pojawiania się nowych zgłoszeń zależy od liczby już obsługiwanych zgłoszeń, natomiast w systemach z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu, możliwość obsługi zgłoszenia zależy od struktury systemu lub konstrukcji funkcji sterującym dostępem do zasobów. Przykładem systemu z procesem napływania zgłoszeń zależnym od stanu jest system ze strumieniami zgłoszeń pochodzącymi od skończo-



**Rysunek 1.** Wiązka pełnodostępna z ruchem zintegrowanym (strumienie zgłoszeń Poissona

nej liczby źródeł ruchu (strumień zgłoszeń Bernoullego lub Pascala), natomiast przykładem systemu z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu jest wiązka pełnodostępna z rezerwacją zasobów lub wiązka z ograniczoną dostępnością.

### 3. Modelowanie systemów z procesem przyjmowania i napływania zgłoszeń zależnym od stanu – podejście klasyczne

Podstawą analizy systemów z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu są metody oparte na analizie wielowymiarowego procesu Markowa oraz metody, w których wielowymiarowy proces obsługi jest aproksymowany przez jednowymiarowy łańcuch Markowa. Badanie systemu – na podstawie równań stanu wynikających z wielowymiarowego procesu Markowa – jest bardzo złożone i w wielu przypadkach może być wręcz niemożliwe z powodu zbyt dużej liczby możliwych stanów, w których system może przebywać. W literaturze przedmiotu udowodniono, że w przypadku wiązki pełnodostępnej, obsługującej mieszaninę różnych strumieni ruchu zintegrowanego, wielowymiarowy proces Markowa może być aproksymowany jednowymiarowym łańcuchem Markowa. Prawdopodobieństwa stanów takiego łańcucha można określić na podstawie prostego wzoru rekurencyjnego, tzw. wzoru Kaufmana-Robertsza. W przypadku bardziej złożonych systemów z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu, przekształcenie wielowymiarowego procesu obsługi na jednowymiarowy łańcuch Markowa nie jest możliwe. Analityczne modelowanie takich systemów prowadzi do aproksymacji wielowymiarowego procesu obsługi przez jednowymiarowy łańcuch Markowa, którego opis można sprowadzić do tzw. uogólnionego wzoru Kaufmana-Robertsza. Uogólnienie polega na wprowadzeniu do wzoru Kaufmana-Robertsza warunkowych (zależnych od stanu) prawdopodobieństw przejść  $\sigma_i(n)$  pomiędzy sąsiednimi stanami procesu. Uogólniony wzór Kaufmana-Robertsza można zapisać w następujący sposób:

$$[Q_n]_V = 1/n \sum_{i=1}^m A_i t_i \sigma_i(n - t_i) [Q_{n-t_i}]_V, \quad (1)$$

gdzie:

- $A_i$  – natężenie ruchu klasy  $i$ ,
- $t_i$  – liczba PJP, niezbędna do zestawienia połączenia klasy  $i$ ,

- $V$  – pojemność systemu w PJP,
- $m$  – liczba klas ruchu oferowanych systemowi,
- $\sigma_i(n)$  – warunkowe prawdopodobieństwo przejść pomiędzy stanami systemu,
- $[Q_n]_V$  – prawdopodobieństwo zajęcia  $n$  PJP w systemie o pojemności  $V$  PJP.

Na podstawie rozkładu zajęcia  $[Q]_V$  dla systemu z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu można określić prawdopodobieństwa blokady  $E_i$  dla oferowanych klas ruchu.

$$E_i = \sum_{n=0}^{V-t_i} (1 - \sigma_i(n)) [Q_n]_V + \sum_{n=V-t_i+1}^V [Q_n]_V \quad (2)$$

## 4. Algorytm splotowy – wersja kanoniczna

Rozkład zajęcia  $[P]_V$  dla systemów z procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu można wyznaczyć za pomocą algorytmu splotowego. Metoda ta pozwala na wyznaczenie rozkładów zarówno dla systemów z poissonowskimi jak i niepoissonowskimi strumieniami zgłoszeń. Jeśli przyjmujemy, że wiązce oferowana jest pojedyncza klasa zgłoszeń  $i$ , to na podstawie modeli opracowanych dla systemów jednousługowych można wyznaczyć rozkład zajęcia  $[p]_V^{\{i\}}$  pojedynczej klasy  $i$ . Jeśli rozkłady pojedynczych klas  $[p]_V^{\{i\}}$  i  $[p]_V^{\{j\}}$  są od siebie niezależne, to można zagregować oba rozkłady wyznaczając rozkład zajęcia  $[P]_V^{\{i,j\}}$  w systemie z dwoma klasami zgłoszeń:

$$[P]_V^{\{i,j\}} = [p]_V^{\{i\}} \overset{N}{*} [p]_V^{\{j\}}. \quad (3)$$

Symbol  $\overset{N}{*}$  we wzorze (3) określa operację splotu, której  $n$ -ty wyraz wyznacza się na podstawie wzoru:

$$[P_n]_V^{\{i,j\}} = k \sum_{l=0}^n [p_{n-l}]_V^{\{i\}} [p_l]_V^{\{j\}}, \quad (4)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem normalizacji:

$$k = \frac{1}{\sum_{n=0}^V \sum_{l=0}^n [p_{n-l}]_V^{\{i\}} [p_l]_V^{\{j\}}}. \quad (5)$$

Za pomocą tak zdefiniowanej operacji splotu można kolejno zagregować rozkłady wszystkich klas, wyznaczając rozkład zajęcia  $[P]_V$  dla systemu z procesem napływania zgłoszeń zależnym lub niezależnym od stanu i procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu.

$$[P]_V = [p]_V^{\{1\}} \overset{N}{*} [p]_V^{\{2\}} \overset{N}{*} \dots \overset{N}{*} [p]_V^{\{m\}}. \quad (6)$$

## 5. Modelowanie wiązki pełnodostępnej z rezerwacją

W celu otrzymania odpowiednich charakterystyk ruchowych w systemach obsługi stosuje się często mechanizm kontroli dostępu CAC (ang. *Call Admission Control*). Systemy, w których wprowadzono mechanizm CAC są systemami z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu. Przykładem systemu z mechanizmem CAC jest wiązka pełnodostępna z rezerwacją. Działanie mechanizmu rezerwacji polega na wprowadzeniu do systemu tzw. granicy rezerwacji  $q$ . Jeśli system jest w stanie zajętości  $n$ , takim że  $n > q$ , to nowo przychodzące zgłoszenia zostają odrzucone bez względu na liczbę wolnych PJP w systemie. Mechanizm rezerwacji może prowadzić do wyrównania prawdopodobieństwa blokady wszystkich klas zgłoszeń, jeżeli granica rezerwacji dla wszystkich klas jest zdefiniowana następująco:

$$q = V - t_{\max(M)}, \quad (7)$$

gdzie  $t_{\max(M)}$  jest liczbą żądanych PJP przez zgłoszenie najstarszej klasy. Prawdopodobieństwo przejścia  $\sigma_i(n)$  w wiązce pełnodostępnej z rezerwacją zdefiniowano następująco:

$$\sigma_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \leq q \\ 0 & \text{dla } n > q. \end{cases} \quad (8)$$

W rozprawie zaproponowano dwie rodziny splotowych algorytmów modelowania wiązki pełnodostępnej z rezerwacją: algorytmy sigma oraz algorytmy asymetryczne. Systemy takie można też modelować za pomocą zaproponowanego w rozprawie uniwersalnego algorytmu hybrydowego.

Oznaczmy przez  $[Q]_{V,q}^X$  rozkład zajętości w systemie o pojemności  $V$  i granicy rezerwacji  $q$ , który obsługuje  $X$  klas ruchu zintegrowanego. W algorytmach sigma zaproponowano zmodyfikowaną operację splotu  $\overset{\Gamma}{*}$ , która na podstawie rozkładów  $[Q]_{V,q}^C$  i  $[Q]_{V,q}^D$  wyznacza zagregowany rozkład zajętości  $[Q]_{V,q}^{CUD}$  dla wiązki pełnodostępnej z rezerwacją obsługującej strumienie ruchu zintegrowanego ze zbioru  $C \cup D$ :

$$[Q]_{V,q}^{CUD} = [Q]_{V,q}^C \overset{\Gamma}{*} [Q]_{V,q}^D. \quad (9)$$

Każdy wyraz  $n$  rozkładu  $[Q]_{V,q}^{CUD}$  jest określany na podstawie wyrażenia:

$$[Q_n]_{V,q}^{CUD} = k \cdot \sum_{(l_C, l_D) \in \Omega_{C,D}(n)} [Q_{l_C}]_{V,q}^C [Q_{l_D}]_{V,q}^D \cdot \Gamma(l_C, l_D). \quad (10)$$

gdzie:

- $l_C$  – liczba PJP zajętych przez zgłoszenia klas ze zbioru  $C$ ,
- $(l_C, l_D)$  – kombinacja zajętych PJP w wiązce, w której  $l_C$  PJP należy do obsługiwanych zgłoszeń klas ze zbioru  $C$  i  $l_D$  PJP należy do obsługiwanych zgłoszeń klas ze zbioru  $D$ ,
- $\Omega_{C,D}(n)$  – zbiór możliwych kombinacji  $(l_C, l_D)$  w stanie zajętości  $n$ , takim że  $n = l_C + l_D$ ,
- $\Gamma(l_C, l_D)$  – prawdopodobieństwo dopuszczenia kombinacji  $(l_C, l_D)$ .

Zgodnie ze wzorem (10) podstawą modyfikacji algorytmu splotowego dla systemów z rezerwacją jest tzw. prawdopodobieństwo dopuszczenia kombinacji  $\Gamma(l_C, l_D)$ . Prawdopodobieństwo to określa, które kombinacje  $(l_C, l_D)$  i w jakim stopniu mogą być uwzględnione w operacji splotu.

W pracy przedstawiono trzy algorytmy sigma, różniące się sposobem wyznaczania prawdopodobieństwa  $\Gamma(l_C, l_D)$ . W algorytmie *sigma 0/1* prawdopodobieństwo  $\Gamma(l_C, l_D)$  jest funkcją zależną od liczby obsługiwanych zgłoszeń  $l_C$  i  $l_D$  należących do odpowiednich zbiorów oraz od największej liczby PJP, żądanych przez zgłoszenia należące do zbiorów  $C$  oraz  $D$ :

$$\Gamma(l_C, l_D) = f(l_C, l_D, t_{\max(C)}, t_{\max(D)}). \quad (11)$$

W algorytmie *sigma  $\lambda t$*  prawdopodobieństwo  $\Gamma(l_C, l_D)$  jest funkcją zależną od parametrów  $l_C, l_D$ , oraz od wartości natężenia zgłoszeń  $\lambda_i$  i liczby  $t_i$  żądanych PJP do obsługi zgłoszeń poszczególnych klas ruchu:

$$\Gamma(l_C, l_D) = f(l_C, l_D, t_i, \lambda_i), \text{ gdzie } i \in C \cup D. \quad (12)$$

W algorytmie *sigma  $yt$*  prawdopodobieństwo  $\Gamma(l_C, l_D)$  jest funkcją parametrów  $l_C, l_D$  oraz wartości średnich  $y_c^C(l_C)$ ,  $y_d^D(l_D)$  liczby zgłoszeń poszczególnych klas ( $c \in C$ ,  $d \in D$ ) obsługiwanych w systemie w stanach  $l_C$  i  $l_D$ :

$$\Gamma(l_C, l_D) = f(l_C, l_D, t_c, t_d, y_c^C(l_C), y_d^D(l_D)), \text{ gdzie } c \in C, d \in D. \quad (13)$$

Zaproponowane w rozprawie algorytmy *sigma  $\lambda t$*  i *sigma  $yt$*  charakteryzują się wysoką dokładnością, natomiast algorytm *sigma 0/1* ma najmniejszą dokładność. Jego zaletą jest jednak najmniejsza złożoność obliczeniowa spośród wszystkich zaproponowanych w rozprawie algorytmów. Rząd złożoności obliczeniowej algorytmu *sigma 0/1* wynosi  $\Theta(mV^2)$  i jest taki sam jak rząd złożoności obliczeniowej algorytmów splotowych w wersji kanonicznej. Rząd złożoności algorytmów *sigma  $\lambda t$*  i *sigma  $yt$*  wynosi  $\Theta(m^2V^2)$ .

W celu weryfikacji dokładności algorytmów z rodziny sigma, rezultaty obliczeń analitycznych zostały porównane z wynikami eksperymentów symulacyjnych. W tym celu skonstruowano symulator, w którym zastosowano metodę interakcji procesów ze względny czasem systemowym. Każdy eksperyment składał się z 10 serii. Warunkiem zakończenia pojedynczej serii była strata 100 000 zgłoszeń. Na podstawie rozkładów Studenta-Fishera wyznaczono 95 procentowe przedziały ufności. Algorytmy zostały zweryfikowane dla systemów przedstawionych w tabeli 1. Na rysunku 2 przedstawiono wykres oraz tabelę z rezultatami otrzymanymi dla systemu nr 8.

W algorytmach asymetrycznych zaproponowano tzw. operację splotu asymetrycznego  $\overset{A}{*}$ , pozwalającą na określenie – na podstawie rozkładów  $[Q]_{V,q}^C$  i  $[Q]_{V,q}^D$  – warunkowych rozkładów  $[Q|C]_{,q}^{C \cup D}$  i  $[Q|D]_{,q}^{C \cup D}$ . Warunkami tych rozkładów są odpowiednio: zdarzenie, że ostatnio przyjętym zgłoszeniem było zgłoszenie klasy należącej do zbioru  $C$  i zdarzenie, że ostatnio przyjętym zgłoszeniem było zgłoszenie klasy należącej do zbioru  $D$ . Operacja splotu asymetrycznego może być zapisana w następujący sposób:

$$[Q|D]_{,q}^{C \cup D} = [Q]_{V,q}^C \overset{A}{*} [Q]_{V,q}^D. \quad (14)$$

**Tabela 1.**

Parametry wybranych systemów z rezerwacją i z klasami ruchu Erlanga, Engseta i Pascala

klasa zgłoszeń liczba żądanych PJP strumień zgłoszeń liczba źródeł				klasa 1 $t_1 = 1$ Poissona $\infty$	klasa 4 $t_4 = 3$ Poissona $\infty$	klasa 2 $t_2 = 1$ Bernoulliego $S_2 = 30$	klasa 5 $t_4 = 3$ Bernoulliego $S_4 = 10$	klasa 3 $t_3 = 1$ Pascala $N_3 = 30$	klasa 6 $t_6 = 3$ Pascala $N_6 = 10$
l.p.	$V$	$q$	$m$	proporcje ruchu oferowanych klas					
1	10	7	2	—	—	1	1	—	—
2	30	27	2	—	—	1	2	—	—
3	10	7	2	—	—	—	—	3	1
4	30	27	2	—	—	—	—	3	1
5	10	7	4	1	3	1	3	—	—
6	30	27	4	1	3	1	3	—	—
7	10	7	4	3	1	—	—	3	1
8	30	27	4	3	1	—	—	3	1
9	10	7	4	—	—	1	1	1	1
10	30	27	4	—	—	1	1	1	1
11	10	7	6	1	1	1	1	1	1
12	30	27	6	1	1	1	1	1	1

Zauważmy, że operacja splotu asymetrycznego jest nieznormalizowana i dlatego w dolnym indeksie rozkładu  $[Q|D]_{V,q}^{CUD}$  pominięto symbol  $V$ . Na podstawie nieznormalizowanych, warunkowych, rozkładów  $[Q|C]_{V,q}^{CUD}$  i  $[Q|D]_{V,q}^{CUD}$  można określić znormalizowany, zagregowany rozkład zajętości w systemie z rezerwacją:

$$[Q]_{V,q}^{CUD} = k \left( [Q|C]_{V,q}^{CUD} \cdot P(C) + [Q|D]_{V,q}^{CUD} \cdot P(D) \right), \quad (15)$$

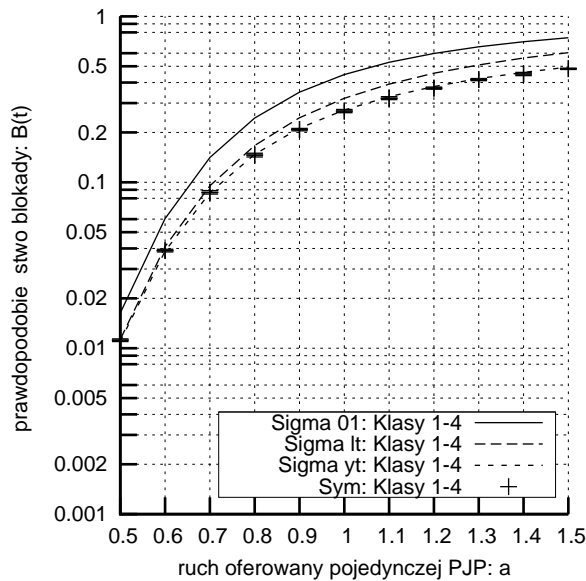
gdzie  $k$  jest współczynnikiem normalizacji, prawdopodobieństwa  $P(C)$  i  $P(D)$  określają zdarzenie, że ostatnio przyjętym do systemu zgłoszeniem jest zgłoszenie klasy należącej do zbioru  $C$  i  $D$ . W rozprawie przyjęto, że prawdopodobieństwo to jest wprost proporcjonalne do ruchu oferowanego przez zbiory poszczególnych klas:

$$P(C) = \frac{\sum_{i \in C} A_i t_i}{\sum_{i \in CUD} A_i t_i}, \quad P(D) = \frac{\sum_{i \in D} A_i t_i}{\sum_{i \in CUD} A_i t_i}. \quad (16)$$

W zaproponowanej operacji splotu asymetrycznego (14) określa się pojedynczy element rozkładu, który jest definiowany następująco:

$$[Q_n|D]_{V,q}^{CUD} = \sum_{(l_C, l_D) \in \Omega_{C,D}(n)} [Q_{l_C}]_{V,q}^C [Q_{l_D}]_{V,q}^D \Gamma(l_C, l_D|D), \quad (17)$$

gdzie  $\Gamma(l_C, l_D|D)$  jest prawdopodobieństwem dopuszczenia kombinacji  $(l_C, l_D)$  pod warunkiem, że ostatnio pojawiło się w systemie zgłoszenie należące do zbioru klas  $D$ . W pracy zaproponowano trzy algorytmy asymetryczne, które różnią się sposobem określania parametru  $\Gamma(l_C, l_D|D)$ . W algorytmie *MaxR* rozważa się zawsze najbardziej optymistyczny przypadek (przyjęcie zgłoszenia ze zbioru  $D$  żądającego największej możliwej liczby PJP równej  $t_{\max(D)}$ ). W algorytmie *MinR* rozważany jest zawsze najbardziej pesymistyczny przypadek (przyjęcie zgłoszenia żądającego najmniejszej możliwej liczby PJP, równej  $t_{\min(D)}$ ). W obu algorytmach za pomocą operacji splotu asymetrycznego agregowane są rozkłady pojedynczych klas. Algorytm *MaxR* wyznacza górną granicę wartości prawdopodobieństwa blokady, natomiast algorytm *MinR* dolną wartość graniczną.



a	Klasy 1, 3, 4, 6				
	$\sigma 01$	$\sigma \lambda t$	$\sigma y t$	Sym.	$\pm$
0.50	0.01628	0.01129	0.01102	0.01117	0.00022
0.60	0.06041	0.04092	0.03850	0.03879	0.00072
0.70	0.14122	0.09528	0.08670	0.08702	0.00212
0.80	0.24419	0.16690	0.14768	0.14606	0.00389
0.90	0.34978	0.24464	0.21172	0.20793	0.00348
1.00	0.44609	0.32063	0.27277	0.26868	0.00608
1.10	0.52899	0.39098	0.32831	0.32146	0.00639
1.20	0.59850	0.45435	0.37776	0.36949	0.00526
1.30	0.65622	0.51068	0.42147	0.41524	0.00609
1.40	0.70409	0.56047	0.46004	0.45003	0.00993
1.50	0.74390	0.60439	0.49416	0.48377	0.00467

**Rysunek 2.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce pełnodostępnej z rezerwacją wyznaczona za pomocą algorytmów z rodziny sigma.

Parametry  $V = 30, q = 27$ , 2 klasy ruchu Erlanga ( $t_1 = 1, t_4 = 3$ ), 2 klasy ruchu Pascala ( $t_3 = 1, N_3 = 30, t_6 = 3, N_6 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1 t_1 : A_3 t_3 : A_4 t_4 : A_6 t_6 = 3 : 3 : 1 : 1$

W algorytmie *Sa3R* zastosowano inne podejście. Na podstawie operacji splotu dla systemu z procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu wyznaczone są zagregowane rozkłady  $[P]_V^{M \setminus \{i\}}$  wszystkich klas za wyjątkiem, odpowiednio, klasy  $i$ . Następnie rozkłady te splatane są asymetrycznie z rozkładami pojedynczych klas  $[p]_V^{\{i\}}$  w następujący sposób:

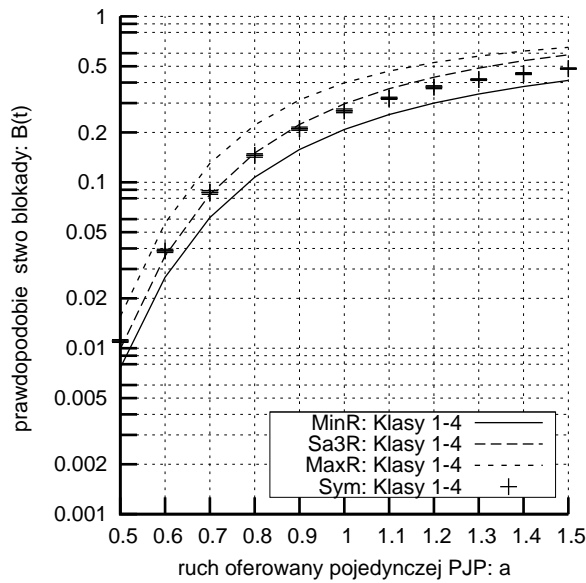
$$[Q|\{i\}]_{V,q} = [P]_V^{M \setminus \{i\}} * [p]_V^{\{i\}}. \quad (18)$$

Wszystkie wyrazy określonych zgodnie ze splotem (18) rozkładów warunkowych są podstawą określenia zagregowanego rozkładu zajętości w systemie z rezerwacją:

$$[Q]_{V,q} = k \sum_{i=1}^m P(\{i\}) [Q|\{i\}]_{V,q}, \quad (19)$$

gdzie  $P(\{i\})$  określa prawdopodobieństwo zdarzenia, że ostatnio pojawiło się w systemie zgłoszenie klasy  $i$ .

Zaproponowana w rozprawie rodzina algorytmów asymetrycznych posiada wystarczającą dokładność do zastosowań inżynierskich. Kosztem mniejszej dokładności zredukowano do  $\Theta(mV^2)$  rząd złożoności obliczeniowej algorytmów asymetrycznych. Algorytm *MinR* niedowymiarowuje system, natomiast algorytm *MaxR* przewymiarowuje go. Najdokładniejszym algorytmem z rodziny algorytmów asymetrycznych jest algorytm *Sa3R*. W celu weryfikacji dokładności algorytmów, rezultaty obliczeń analitycznych zostały porównane z wynikami eksperymentów symulacyjnych. Algorytmy zostały zweryfikowane dla wszystkich systemów przedstawionych w tabeli 1. Na rysunku 3 przedstawiono rezultaty dla systemu nr 8.



a	Klasy 1, 3, 4, 6				
	MinR	Sa3R	MaxR	Symulacja	±
0.50	0.00759	0.00988	0.01555	0.01105	0.00022
0.60	0.02679	0.03598	0.05668	0.03863	0.00085
0.70	0.06143	0.08462	0.13027	0.08680	0.00219
0.80	0.10711	0.15017	0.22198	0.14533	0.00349
0.90	0.15743	0.22325	0.31436	0.21044	0.00492
1.00	0.20776	0.29663	0.39749	0.26961	0.00673
1.10	0.25565	0.36627	0.46841	0.32096	0.00451
1.20	0.30007	0.43036	0.52760	0.37484	0.00750
1.30	0.34076	0.48835	0.57674	0.41637	0.00448
1.40	0.37782	0.54033	0.61764	0.45181	0.00526
1.50	0.41152	0.58668	0.65191	0.48462	0.00485

**Rysunek 3.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce pełnodostępnej z rezerwacją wyznaczoną za pomocą algorytmów asymetrycznych.

Parametry:  $V = 30$ ,  $q = 27$ , 2 klasy ruchu Erlanga ( $t_1 = 1$ ,  $t_4 = 3$ ), 2 klasy ruchu Pascala ( $t_3 = 1$ ,  $t_6 = 3$ ,  $N_3 = 30$ ,  $N_6 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1t_1 : A_4t_4 : A_3t_3 : A_6t_6 = 3 : 3 : 1 : 1$

## 6. Modelowanie wiązki z ograniczoną dostępnością

W rozprawie zaproponowano uniwersalny algorytm hybrydowy, za pomocą którego można modelować dowolne systemy z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu. Przykładem takiego systemu jest wiązka z ograniczoną dostępnością. Wiązka ta składa się z  $K$  podgrup o pojemności  $V_j$ . Całkowita pojemność systemu jest więc równa:

$$V = \sum_{j=1}^K V_j. \quad (20)$$

Każde oferowane wiązce zgłoszenie może być obsłużone tylko w obrębie pojedynczej podgrupy. Zatem jeśli system jest w stanie  $n < V - t_i$  to zgłoszenie klasy  $i$  może zostać odrzucone, ze względu na ograniczenia w strukturze systemu. W publikacjach znanych w literaturze przedmiotu zaproponowano sposób wyznaczania warunkowego współczynnika przejścia  $\sigma_i(n)$  dla wiązek z ograniczoną dostępnością. Współczynnik ten nie może być bezpośrednio wykorzystany w operacji splotu.

W zaproponowanym algorytmie hybrydowym, wprowadzono tzw. współczynnik transformacji  $\delta(n)$ , który w każdym stanie  $n$  określa zależność pomiędzy rozkładem w systemie z procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu  $[P]_V$  oraz rozkładem w systemie z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu  $[Q]_V$ :

$$[Q_n]_V = \delta(n)[P_n]_V \quad (21)$$

W rozprawie wykazano, że współczynnik ten można wyznaczyć za pomocą równania:

$$\delta(n) = \frac{\sum_{i=1}^m \delta(n - t_i) [P_{n-t_i}]_V A_i t_i \sigma_i(n - t_i)}{\sum_{i=1}^m [P_{n-t_i}]_V A_i t_i}. \quad (22)$$



Jeśli rozkład  $[P]_V$  jest rozkładem systemu z procesem napływania zgłoszeń niezależnym od stanu, to określony na podstawie wzorów (21) i (22) rozkład  $[Q]_V$  jest dokładnie taki sam jak rozkład wyznaczony na podstawie równań rekurencyjnych (wzór (1)).

Za pomocą współczynnika transformacji można również określić rozkład  $[Q]_V$  dla systemu z procesem napływania i przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu. Tak wyznaczony rozkład obarczony jest pewnym błędem, ponieważ w równaniu (22) ruch oferowany  $A_i$  klasy  $i$  nie zależy od liczby obsługiwanych zgłoszeń tej klasy. Dlatego też w pracy zaproponowano uogólniony model, w którym oferowany ruch jest zależny od stanu systemu:

$$\delta(n) = \frac{\sum_{i=1}^m \delta(n - t_i) [P_{n-t_i}]_V A_i(n - t_i) t_i \sigma_i(n - t_i)}{\sum_{i=1}^m [P_{n-t_i}]_V A_i(n - t_i) t_i}. \quad (23)$$

Zaproponowane w rozprawie algorytmy różnią się sposobem określania średniej liczby  $y_i(n)$  obsługiwanych zgłoszeń danej klasy w stanie  $n$ . Parametr ten jest potrzebny do oszacowania wartości  $A_i(n)$ , tj. wartości natężenia ruchu oferowanego klasy  $i$  w stanie  $n$ .

W rozprawie zaproponowano trzy algorytmy hybrydowe wykorzystujące definicję (23).

W pierwszych dwóch algorytmach iteracyjnie określa się przybliżone rozkłady zajętości  $[Q]_V$  na podstawie kolejnych przybliżeń wartości średnich liczby obsługiwanych zgłoszeń  $y_i(n)$ . W pierwszym z proponowanych algorytmów wykorzystuje się tylko jedną iterację, w drugim proces iteracyjny może być powtarzany wielokrotnie do momentu, gdy błąd względny parametru  $y_i(n)$  będzie mniejszy od zadanej wartości. W trzecim z proponowanych algorytmów średnie liczby obsługiwanych zgłoszeń wyznaczane są na podstawie operacji splotu dla systemu z procesem przyjmowania zgłoszeń niezależnym od stanu.

Algorytmy hybrydowe charakteryzują się najwyższą dokładnością w porównaniu z innymi zaproponowanymi w rozprawie algorytmami. Błędy wynikające z założeń przyjętych w równaniu (22) mają bardzo mały wpływ na dokładność rezultatów. Błędy te można zredukować rozwiązując uwikłane równanie (23) metodą iteracyjną. Z przeprowadzonych badań wynika, że do inżynierskich zastosowań wystarczająca jest jedna iteracja. Rezultaty obliczeń algorytmów hybrydowych zostały zweryfikowane dla wiązki pełnodostępnej z rezerwacją (systemy przedstawione w tabeli 1) oraz dla wiązki z ograniczoną dostępnością (systemy przedstawione w tabeli 2). Na rysunku 4 przedstawiono rezultaty dla systemu nr 8 z tabeli 1, natomiast na rysunkach 5, 6, 7 przedstawiono rezultaty dla systemów nr 5, 8, 9 z tabeli 2. Rezultaty obliczeń algorytmu hybrydowego (wynikającego z równania (22)) zostały podpisane jako "hybrydowy", algorytmu hybrydowego z pojedynczą iteracją jako "hybr. SISM", algorytmu hybrydowego z wieloma iteracjami jako "hybr. MISM", natomiast algorytmy hybrydowego ze splotową metodą wyznaczania średniej liczby obsługiwanych zgłoszeń jako "hybr Y spl".

## 7. Podsumowanie

W pracy wykazano, że systemy zależne od stanu można skutecznie modelować za pomocą algorytmów splotowych. Najważniejsze rezultaty pracy to:

**Tabela 2.**

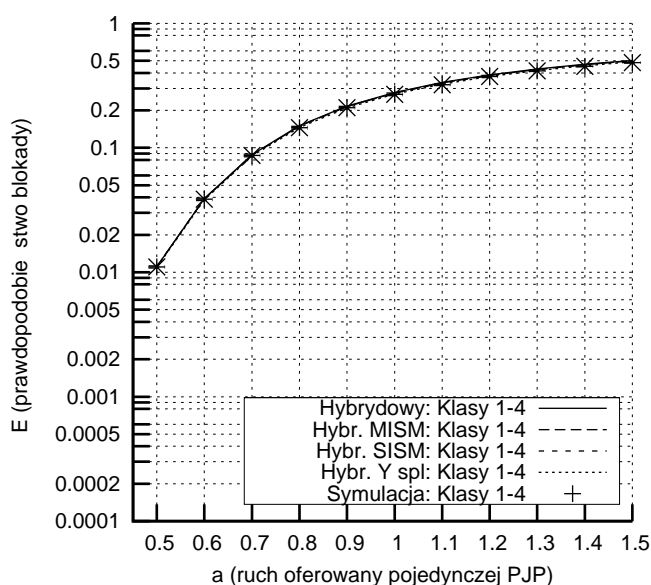
Parametry wybranych systemów z ograniczoną dostępnością i klasami ruchu Erlanga, Engseta, Pascala

klasa zgłoszeń				klasa 1	klasa 4	klasa 2	klasa 5	klasa 3	klasa 6
liczba żądanych PJP				$t_1 = 1$	$t_4 = 3$	$t_2 = 1$	$t_5 = 3$	$t_3 = 1$	$t_6 = 3$
strumień zgłoszeń				Poissona	Poissona	Bernoulliego	Bernoulliego	Pascala	Pascala
liczba źródeł				$\infty$	$\infty$	$S_2 = 60$	$S_5 = 20$	$N_3 = 60$	$N_6 = 20$
l.p.	$V$	$K$	$m$	proporcje ruchu oferowanych klas					
1	20	2	2	—	—	1	1	—	—
2	20	2	2	—	—	—	—	1	1
3	20	2	4	1	1	1	1	—	—
4	20	2	4	1	1	—	—	1	1
5	20	2	6	1	1	1	1	1	1
6	60	2	2	—	—	1	1	—	—
7	60	2	2	—	—	—	—	1	1
8	30	3	2	—	—	1	1	—	—
9	30	3	2	—	—	—	—	1	1

1. opracowanie algorytmów z rodziny sigma (3 algorytmy) do określania charakterystyk wiązki pełnodostępnej z rezerwacją,
2. opracowanie algorytmów asymetrycznych (3 algorytmy) do określania charakterystyk wiązki pełnodostępnej z rezerwacją,
3. opracowanie uniwersalnych algorytmów hybrydowych (4 algorytmy) do modelowania systemów z procesem przyjmowania zgłoszeń zależnym od stanu.

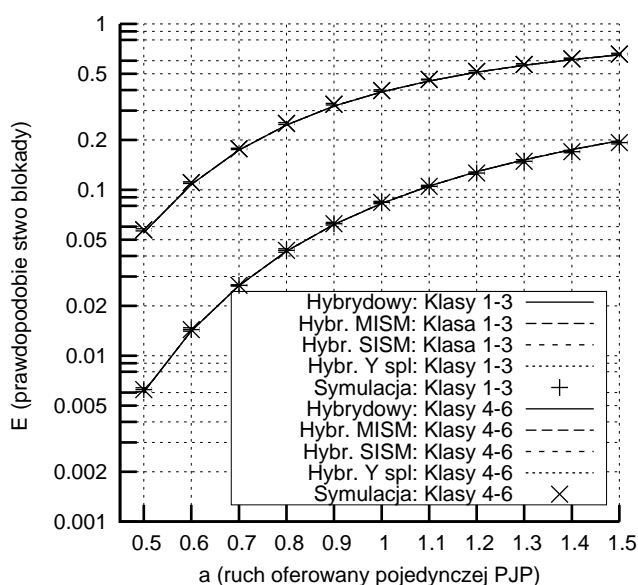
Modelowanie systemów za pomocą algorytmów spłotowych jest bardziej skomplikowane niż modelowanie systemów za pomocą algorytmów rekurencyjnych. Kosztem większego rzędu złożoności obliczeniowej, w porównaniu do algorytmów rekurencyjnych, można modelować systemy z dowolnym procesem napływu zgłoszeń zależnym od stanu.

Zaletą algorytmów spłotowych jest możliwość dodania nowej klasy zgłoszeń bez potrzeby wykonywania wszystkich obliczeń od początku. Wystarczy zagregować istniejący rozkład zajętości z rozkładem nowo dodanej klasy. Obliczenia w algorytmach spłotowych, w przeciwieństwie do obliczeń w algorytmach rekurencyjnych, mogą być zrównoleglane. Zrównoleglenie obliczeń może być zrealizowane poprzez wykorzystanie wielu rdzeni procesora lub karty graficznej. We współczesnych systemach komputerowych odchodzi się od zwiększania częstotliwości pracy procesora na rzecz zwiększenia jego liczby rdzeni, co może przyczynić się do wzrostu popularności metod spłotowych.



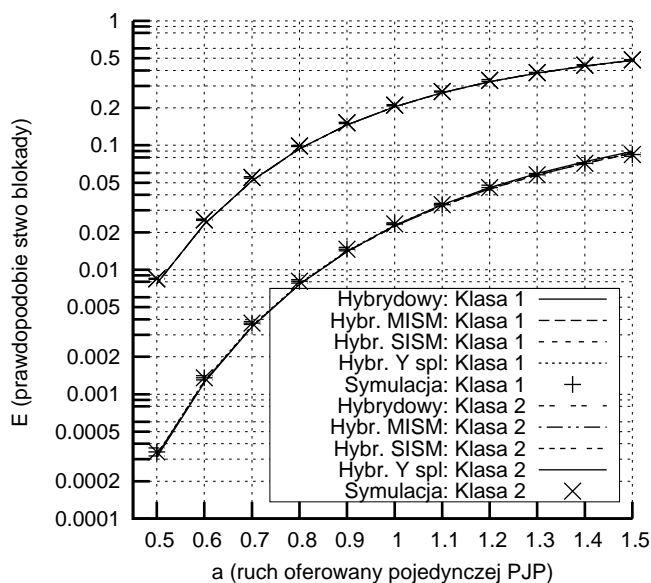
a	Klasy 1, 2, 3, 4					
	Hybr.	MISM	SISM	Hybr. Y	Sym.	±
0.50	0.01112	0.01108	0.01108	0.01094	0.01105	0.00022
0.60	0.03905	0.03880	0.03880	0.03817	0.03863	0.00085
0.70	0.08829	0.08751	0.08751	0.08588	0.08680	0.00219
0.80	0.15077	0.14922	0.14922	0.14623	0.14533	0.00349
0.90	0.21646	0.21410	0.21410	0.20964	0.21044	0.00492
1.00	0.27904	0.27597	0.27597	0.27014	0.26961	0.00673
1.10	0.33585	0.33224	0.33224	0.32522	0.32096	0.00451
1.20	0.38631	0.38232	0.38232	0.37435	0.37484	0.00750
1.30	0.43076	0.42654	0.42654	0.41781	0.41637	0.00448
1.40	0.46987	0.46553	0.46553	0.45623	0.45181	0.00526
1.50	0.50435	0.49998	0.49998	0.49025	0.48462	0.00485

**Rysunek 4.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce pełnodostępnej z rezerwacją wyznaczona za pomocą algorytmów hybrydowych. Parametry:  $V = 30, q = 27$ , 2 klasy ruchu Erlanga ( $t_1 = 1, t_3 = 3$ ), 2 klasy ruchu Pascala ( $t_2 = 1, t_4 = 3$ ,  $N_2 = 30, N_4 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1t_1 : A_2t_2 : A_3t_3 : A_4t_4 = 3 : 3 : 1 : 1$



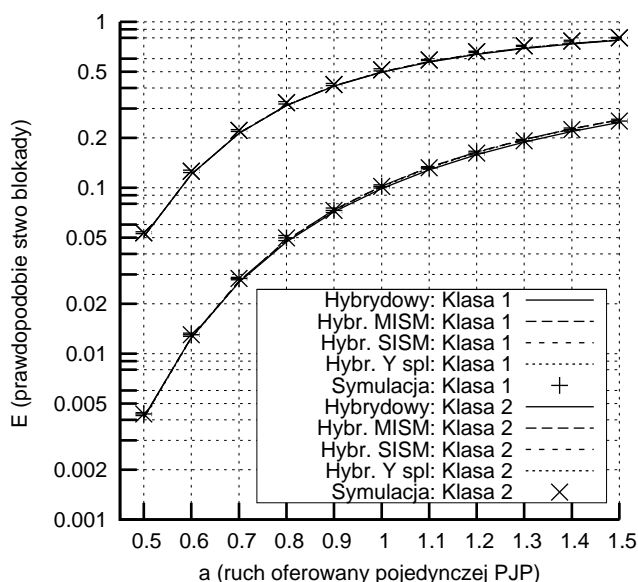
a	Klasy 4, 5, 6					
	Hybr.	MISM	SISM	Y	Sym.	±
0.50	0.05521	0.05521	0.05521	0.05521	0.05743	0.00080
0.60	0.10773	0.10773	0.10773	0.10773	0.11058	0.00135
0.70	0.17369	0.17369	0.17369	0.17369	0.17670	0.00178
0.80	0.24616	0.24616	0.24616	0.24616	0.25101	0.00296
0.90	0.31921	0.31922	0.31922	0.31922	0.32806	0.00409
1.00	0.38896	0.38897	0.38897	0.38897	0.39647	0.00442
1.10	0.45330	0.45332	0.45332	0.45332	0.46249	0.00300
1.20	0.51143	0.51146	0.51146	0.51146	0.51715	0.00668
1.30	0.56329	0.56332	0.56332	0.56332	0.56919	0.00673
1.40	0.60921	0.60925	0.60925	0.60925	0.61634	0.00617
1.50	0.64973	0.64977	0.64977	0.64977	0.65708	0.00729

**Rysunek 5.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce z ograniczoną dostępnością wyznaczona za pomocą algorytmów hybrydowych. Parametry:  $V = 20, K = 2$ , 2 klasy ruchu Erlanga ( $t_1 = 1, t_3 = 3$ ), 2 klasy ruchu Engseta ( $t_2 = 1, t_5 = 3$ ,  $S_2 = 30, S_5 = 10$ ) 2 klasy ruchu Pascala ( $t_3 = 1, t_6 = 3$ ,  $N_3 = 30, N_6 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1t_1 : A_2t_2 : A_3t_3 : A_4t_4 : A_5t_5 : A_6t_6 = 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1$



a	Klasa 2					
	Hybr.	MISM	SISM	Y	Sym.	±
0.50	0.00771	0.00774	0.00774	0.00775	0.00845	0.00008
0.60	0.02319	0.02327	0.02327	0.02330	0.02522	0.00035
0.70	0.05172	0.05185	0.05185	0.05192	0.05515	0.00081
0.80	0.09356	0.09368	0.09368	0.09382	0.09893	0.00101
0.90	0.14584	0.14585	0.14585	0.14609	0.15148	0.00182
1.00	0.20436	0.20409	0.20409	0.20446	0.20969	0.00210
1.10	0.26508	0.26439	0.26440	0.26488	0.27068	0.00288
1.20	0.32495	0.32374	0.32375	0.32436	0.33191	0.00625
1.30	0.38203	0.38022	0.38025	0.38095	0.38295	0.00309
1.40	0.43521	0.43280	0.43284	0.43362	0.43983	0.00463
1.50	0.48405	0.48105	0.48110	0.48194	0.48607	0.00302

**Rysunek 6.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce z ograniczoną dostępnością wyznaczona za pomocą algorytmów hybrydowych. Parametry:  $V = 30, K = 3, 2$  klasy ruchu Bernoulliego ( $t_1 = 1, t_2 = 3, S_1 = 30, S_2 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1 t_1 : A_2 t_2 = 1 : 1$



a	Klasa 2					
	Hybr.	MISM	SISM	Y	Sym.	±
0.50	0.05087	0.05077	0.05076	0.05071	0.05356	0.00069
0.60	0.12038	0.12037	0.12037	0.12021	0.12569	0.00199
0.70	0.21282	0.21324	0.21325	0.21294	0.22149	0.00281
0.80	0.31292	0.31413	0.31414	0.31369	0.32524	0.00573
0.90	0.40927	0.41143	0.41146	0.41088	0.41908	0.00641
1.00	0.49612	0.49920	0.49924	0.49860	0.51409	0.00795
1.10	0.57164	0.57547	0.57551	0.57486	0.58878	0.00441
1.20	0.63604	0.64038	0.64043	0.63980	0.65939	0.00668
1.30	0.69039	0.69501	0.69507	0.69448	0.71715	0.00521
1.40	0.73603	0.74073	0.74078	0.74026	0.76611	0.00914
1.50	0.77429	0.77889	0.77895	0.77849	0.80043	0.00646

**Rysunek 7.** Zależność prawdopodobieństwa blokady  $E$  od ruchu oferowanego PJP w wiązce z ograniczoną dostępnością wyznaczona za pomocą algorytmów hybrydowych. Parametry:  $V = 30, K = 3, 2$  klasy ruchu Pascala ( $t_1 = 1, t_2 = 3, N_1 = 30, N_2 = 10$ ), proporcje ruchu  $A_1 t_1 : A_2 t_2 = 1 : 1$

## Spis publikacji

- [1] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Algorytmy obliczeń charakterystyk ruchowych wiązki pełnodostępnej ze skończoną liczbą źródeł, *Materiały Poznańskich Warsztatów Telekomunikacyjnych*, Instytut Elektroniki i Telekomunikacji, Politechnika Poznańska, Poznań, 2004.
- [2] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., A convolution algorithm for a full-availability group with bandwidth reservation, *Proceedings of 12th Polish Teletraffic Seminar*, Poznań, 2005, s. 89–100.
- [3] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Wykorzystanie algorytmów splotowych w modelowaniu wiązek pełnodostępnych z rezerwacją, *Materiały Poznańskich Warsztatów Telekomunikacyjnych*, Instytut Elektroniki i Telekomunikacji, Politechnika Poznańska, Poznań, 2005.
- [4] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Blocking probability calculation in a FAG with bandwidth reservation, *Proceedings of Advanced International Conference on Telecommunications*, Guadeloupe, 2006.
- [5] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., A new convolution algorithm of blocking probability calculation in full-availability group with bandwidth reservation, *Proceedings of Fifth International Symposium on Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing*, Patras, 2006, s. 50–54.
- [6] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Asymmetric convolution algorithm for full-availability group with bandwidth reservation, *Proceedings of Asia-Pacific Conference on Communications*, Busan, 2006.
- [7] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Asymetryczny algorytm splotowy obliczania prawdopodobieństwa blokady w wiązce pełnodostępnej z rezerwacją, *Materiały Krajowego Sympozjum Telekomunikacji*, Bydgoszcz, 2006.
- [8] Głąbowski M., Kaliszan A., Symulator wiązki pełnodostępnej obsługującej nie-poissonowskie strumienie zgłoszeń, *Materiały Poznańskich Warsztatów Telekomunikacyjnych*, Instytut Elektroniki i Telekomunikacji, Politechnika Poznańska, Poznań, 2006.
- [9] Głąbowski M., Kaliszan A., Simulator of full-availability group with bandwidth reservation and multi-rate Bernoulli-Poisson-Pascal traffic streams, *Proceedings of Eurocon 2007*, Warszawa, 2007, s. 2271–2277.
- [10] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Asymmetric convolution algorithm for blocking probability calculation in full-availability group with bandwidth reservation, *IET Circuits Devices Systems*, 2007, 2, 1, s. 87–94.
- [11] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., On the application of the asymmetric convolution algorithm in modeling of full-availability group with bandwidth reservation, *International Teletraffic Congress, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4516, red. J.Y. Lorne Mason Tadeusz Drwiega, Springer, 2007, s. 878–889.

- [12] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Iterative algorithm for blocking probability calculation in erlang–engset–pascal multi-rate systems, *Proceedings of 14th Polish Teletraffic Symposium*, red. T. Czachórski, Zakopane, 2007, s. 77–88.
- [13] Kaliszan A., Zwierzykowski P., Remote access server in the laboratory of computer networks, *Materiały Poznańskich Warsztatów Telekomunikacyjnych*, Politechnika Poznańska, Poznań, 2007.
- [14] Głąbowski M., Kaliszan A., Splotowy algorytm określania warunkowych współczynników przejścia w wiązce z ograniczoną dostępnością, *Materiały Poznańskich Warsztatów Telekomunikacyjnych*, Politechnika Poznańska, Poznań, 2007.
- [15] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Convolution algorithm for State-passage Probabilities Calculation in Limited-Availability Group, *Proceedings of the Advanced International Conference on Telecommunications*, Athens, Greece, 2008.
- [16] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Modelowanie wiązek z ograniczoną dostępnością algorytmami splotowymi, *Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, Przegląd Telekomunikacyjny*, 2008.
- [17] Głąbowski M., Kaliszan A., Stasiak M., Modeling product-form state-dependent systems with BPP traffic, *Journal of Performance Evaluation*, 2010, 67, s. 174–197.